Nombres réels

1-Ensembles de nombres

2-Règles de calcul dans R

3-Majorant, minorant, borne inférieure, borne supérieure

4-La Propriété d'Archimède

Ensembles de nombres

1.1 Ensembles des nombres

Vous avez rencontré jusqu`a présent différents types de nombres : d'abord les entiers, ou entiers naturels, dés la petite enfance, puis au collége les entiers relatifs et les rationnels. Vous avez noté $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers, $\mathbb{Z}$ celui des entiers relatifs, et $\mathbb{Q}$ celui des rationnels. En identifiant les entiers naturels aux entiers relatifs positifs, vous avez ´ecrit $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, puis en identifiant les entiers relatifs aux fractions rationnelles dont le d ´enominateur est 1, vous avez aussi ´ecrit :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}.$$

Dans $\mathbb{Q}$ vous savez faire des additions et des soustractions, des multiplications et des divisions.
Vous savez aussi comparer deux nombres rationnels quelconques.

ça n'est pas tout.Vous avez rencontré π et $\sqrt{2}$ et on vous a dit qu'il ne s'agit pas de nombres rationnels. Vous avez alors admis l'existence d'un ensemble de nombre noté $\mathbb{R}$,dit ensemble
des nombres réels, tel que $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, et dans lequel vous pouvez faire additions, soustractions,
multiplications et divisions, et aussi comparer deux nombres réels quelconques.
Dans ce premier chapitre, on veut d'abord faire le point sur les règles qui r´egissent la manipulation des nombres réels. On veut aussi mettre l'accent sur une propriété essentielle de $\mathbb{R}$, qui n'est pas vraie dans l'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels, et dont on va déduire la plupart des résultats de ce cours : la propriété de la borne supérieure.
Pour commencer, il est temps de montrer la :
Proposition :Il n'existe pas de nombre rationnel dont le carré est 2. Autrement dit $\sqrt{2}$ n'est pas un rationnel.
Preuve: $\sqrt{2}$ n'est pas un rationnel.

Au passage, il est important de s'interroger sur ce que signifie cette "preuve", ou plus précisément sur ce que l'on entend en mathématique lorsque l'on parle de " démonstration" :à partir de propriétés déjà établies (des théorèmes) et de notions déjà définies, on déduit une nouvelle propriété en utilisant les règles de la logique mathématique. Ici par exemple, on a utilisé les notions de fraction irréductible et de nombre pair, on a utilisé la propriété "si n^2 est pair alors n est pair". . . Dans ce "jeu de construction" que sont les mathématiques, il faut bien sur avoir un socle : c'est le rôle de ce que l'on nomme axiomes. Un axiome est un énoncé mathématique admis une fois pour toutes, et qui n'a pas pour vocation d'être démontré. Vous avez par exemple certainement entendu parler des axiomes d'Euclide, qui fondent la géométrie euclidienne, dont le célèbre "par un point passe une et une seule droite parallèle `a une droite donnée". La démarche mathématique telle que l'on vient de l'esquisser peut paraitre fastidieuse. Mais il faut avoir en tête l'une des septicités importantes des mathématiques par rapport aux autres sciences : une fois que vous avez démontré un théorème, celui-ci est vrai pour l' ´eternité !
Au niveau ou se situe ce cours, on va voir affleurer quelques axiomes de l'analyse concernant les nombres réels : les théorèmes que nous ´établirons ensuite reposeront parfois directement sur ce socle. La propriété de la borne supérieure évoquée plus haut est l'un de ces axiomes.

Règles de calcul dans R

Rappelons-le, on admet l'existence d'un ensemble **IR**, qu'on appelle ensemble des nombres réels, qui contient **Q**. On admet aussi que l'on peut manipuler ces réels suivant certaines règles (finalement un petit nombre) que l'on énonce maintenant.

1-Somme et produit

2-La relation d'ordre

3-Distance dans R : valeur absolue

Somme et produit (Règles de calcul dans R)

Si a et b sont deux réels quelconques, on sait définir le réel somme de a et b, noté **a + b**, et le réel produit de **a** et **b**, noté **a×b**. Voici les quelques règles (axiomes) qui fondent le calcul dans **IR** tel que vous le pratiquez depuis toujours !

– Pour l'addition :

Règle 1 : a + b = b + a pour tous réels a et b.

Règle 2 : a + (b + c) = (a + b) + c pour tous réels **a**, **b** et **c.**

Règle 3 : a + 0 = 0 + a = a pour tout réel **a**.

Règle 4 : Pour tout **a** ∈ **IR**, il existe un unique réel, noté **−a**, qui vérifie **a + (−a) =(−a) + a = 0.**

On résume ces quatre propriétés en disant que (**IR**,+) (lire : **IR** muni de l'addition) est un groupe commutatif (la commutativité est la propriété énoncée dans la règle 1).

– Pour la multiplication :

Règle 5 : a × b = b × a pour tous réels **a** et **b**.

Règle 6 : a × (b × c) = (a × b) × c pour tous réels **a**, **b** et **c**.

Règle 7 : a × 1 = 1 × a = a pour tout réel **a**.

Règle 8 : Pour tout a ∈ **IR*** = **IR**\ {0}, il existe un unique réel, noté **1/a**, qui vérifie **a× 1/a= 1/a ×a = 1**

On remarque que la multiplication dans **IR*** vérifie les mêmes quatre propriétés que l'addition dans R : (**IR***,×) est aussi un groupe commutatif.

Voilà une dernière règle, que vous connaissez sous le nom de distributivité :

Règle 9 : a × (b + c) = (a × b) + (a × c) pout tous **a**, **b** et **c** dans **IR.**

On résume les neuf propriétés qui précèdent en disant que (**IR**,+,×) est un corps commutatif.

Il faut noter qu'à ce stade, **IR** et **Q** ont exactement les mˆemes propriétés : (**Q**,+,×) est aussi un corps commutatif.

La relation d'ordre (Règles de calcul dans R)

On sait aussi comparer deux réels quelconque **a** et **b** : on a toujours ou bien **a ≤ b**, ou bien **b ≤ a**. En particulier, notant **IR+** l'ensemble c réels a tels que **0 ≤ a**, et **IR**– l'ensemble des réels a tels que **a ≤ 0**, on voit que **IR** est la réunion de **IR+** et de **IR**– : tout réel est ou bien positif, ou bi négatif.

La relation d'ordre ≤ est compatible avec l'addition et la multiplication, dans le sens ou l'on à les trois propriétés suivantes :

Règle 10 : Si a ≤ b, alors a + c ≤ b + c pour tous réels **a**, **b** et **c**.

Règle 11 : Si a ≤ b et 0 ≤ c, alors a × c ≤ b × c. Si **a ≤ b et c ≤ 0**, alors **b × c ≤ a × c.**

Règle 12 : Si a > 0, alors **1/a > 0.**

Certaines des conséquences de ces règles doivent être soulignées :

– Supposons que **a ≤ b et que c ≤ d**. La Règle 10 donne d'abord **a+c ≤ b+c**, puis **b+c ≤ b+d**,

donc finalement **a + c ≤ b + d** : on peut ajouter membre `a membre des inégalités.

– Attention ! on ne peut multiplier membre à membre des inégalités que lorsqu'elles ne concernent que des nombres positifs.

– Supposons que **0 < a ≤ b**. La Règle 12 donne **1/a > 0**, donc la Règle 11 donne **0 < 1 ≤ b×1/a**

.

On a aussi **1/b > 0**, d'ou finalement **0 < 1/b≤ 1/a**

Distance dans R : valeur absolue

GUIDE SCIENTIFIQUE
www.guidescientific.com

Voici pour finir une notion très utile, que l'on peut définir sans ajouter de nouvel axiome.
Disons d'abord que **max{a, b}** désigne le nombre **a** si **b ≤ a** et le nombre b sinon.

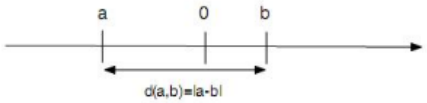
Définition *: Pour* ***x*** *dans* ***lR****, on note* ***|x|*** *le nombre réel défini par* ***|x| = max{−x, x}.***

A partir de cette définition , et en raisonnant au cas par cas, on obtient la

Proposition *1.2.3 Soient* ***x*** *et* ***y*** *deux réels. On a*
1. |xy| = |x| |y|
2. ||x| − |y|| ≤ |x + y| ≤ |x| + |y| *(inégalité triangulaire).*

Après la présentation "axiomatique" qui précède, il faut quand même se rappeler que l'on peut utiliser son "sens commun" quand or manipule des réels. En particulier il est commode de se représenter l'ensemble des réels comme étant l'ensemble des points d'une droite. Cette analogie ne suffit pas à comprendre toutes les propriétés des nombres réels, mais elle est tout de même parfois utile pour guider son raisonnement Dans ce contexte, vous ne devez pas être surpris par la

Définition *On appelle distance entre deux réels* ***a*** *et* ***b*** *le nombre* ***d(a, b) = |a − b|.***



Majorant, minorant, borne inférieure, borne supérieure

1-Définitions, exemples

2-La propriété de la borne supérieure

Définitions, exemples (Majorant, minorant, borne inférieure, borne supérieure)

Définition 1 Soit A une partie non-vide de **lR**, et m un nombre réel. On dit que
1. **m** est un majorant de A lorsque **a ≤ m** pour tout **a ∈ A.**
2. **m** est un minorant de A lorsque **m ≤ a** pour tout **a ∈ A.**

Par exemple 0 est un minorant de **lN**. D'ailleurs n'importe quel réel plus petit qu'un minorant de A est encore un minorant de **A.** On remarque aussi que puisque 0 ∈ l**N**, 0 est le plus grand des minorants de l**N** (. . . n'importe quel nombre réel supérieur strictement `a 0 ne serait pas plus petit que tous les éléments de l**N**).
Il est surement clair pour vous que l'ensemble **lN** n'a pas de majorant dans l**R**. . . pourtant cela ne découle pas des propriétés de R énoncées jusqu'`a présent (cf. le paragraphe suivant).

Définition 2 Soit A une partie non-vide de l**R**, et b un nombre réel. On dit que
1. **b** est la borne supérieure de A lorsque b est le plus petit des majorants de **A.**
2. **b** est la borne inférieure de A lorsque b est le plus grand des minorants de **A.**

On a vu par exemple que **0** est la borne inférieure de **lN** dans **lR**. Voci d'autres exemples : si **A =]0, 2], 0** est un minorant de **A**, et **2** est un majorant de A. Puisque **2** est un élément de A, c'est nécessairement le plus petit des majorants, donc la borne supérieure de **A**, ce qu'on note :

2 = sup]0, 2].

Il n'est pas aussi évident que 0 soit la borne inférieure de **A =]0, 2]**. Supposons qu'il existe un minorant de A, qu'on note m, plus strictement plus grand que 0. Puisque m > 0, on a aussi **m > m/2 > 0** donc **m/2 ∈ A et m/2** est inférieur ` m, ce qui est absurde puisque m est un minorant de A. Donc 0 est bien le plus grand des minorants de **A : 0 = inf]0, 2].**

Proposition 3 Soit A une partie non-vide de **lR**, et **b** un réel. Les deux énoncés suivants sont équivalents

1. **b** est la borne supérieure de **A.**
2. **b** est un majorant de A et, pour tout **∈ > 0**, il existe au moins un élément de **A** dans l'intervalle **[b – ∈, b].**

Preuve: Si b est la borne supérieure de A, c'est un majorant de A, et pour tout **∈ > 0,**

b – ∈ n'est pas un majorant de A : il existe un élément x de A qui est supérieur ` **b – ∈.**

Puisque b est un majorant de A, on a aussi **x ≤ b**, donc **x ∈ [b – ∈, b].**

Réciproquement, si (2) est vraie, alors b est bien le plus petit des majorants de A.

Bien entendu, si A n'admet pas de majorant, **A** n'a pas non plus de borne supérieure. Voilà` maintenant la différence essentielle entre **Q** et **lR** : dans **lR**, c'est le seul cas ou une partie

(non-vide) de R n'a pas de borne supérieure.

La propriété qui suit est elle aussi un axiome :

Règle 13 : Soit A une partie non-vide de **lR.**

1. Si A est majorée, alors A admet une borne supérieure.
2. si A est minorée, alors A admet une borne inférieure.

On veut insister sur le fait que cette propriété n'est pas vraie dans $\mathbb{Q}$. On considère par exemple $A = \{x \in \mathbb{Q}, x^2 \leq 2\}$. A n'est pas vide ($0 \in A$ par exemple), et majorée (par 3 par exemple). Suppose que A admette une borne supérieure $b \in \mathbb{Q}$.

Supposons que $b^2 < 2$, et considérons pour $n \in \mathbb{N}^*$ le nombre rationnel $b_n = b(1 + \frac{1}{n})$. On a $(b_n)^2 = b^2(1 + 2/n + 1/n^2) \leq b^2(1 + 3/n)$. Il est alors facile de vérifier que si $n > 3b^2/(2 - b^2)$ alors $b_n^2 < 2$. Donc $b_n > b$ et $b_n \in A$ ce qui est absurde. De la même manière, on ne peut pas avoir $b^2 > 2$, donc b est un rationnel tel que $b^2 = 2$, ce qui là encore est absurde : A n'a pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$.

Le raisonnement qui précède repose sur une propriété importante de $\mathbb{Q}$: pour tout rationnel r, on peut trouver un entier n tel que $r < n$ (dans le raisonnement qui précède, $r = 3b^2/(2 - b^2)$). Cette propriété porte le nom de propriété d'Archimède, et nous allons admettre comme (dernier !) axiome que $\mathbb{R}$ vérifie aussi cette propriété.

Règle 14 : Pour tout **x ∈ R**, il existe **n ∈ lN** tel que **x < n.**

La Propriété d'Archimède

1-Développement décimal d'un réel .

2-Q est dense dans R

3-Caractérisation des intervalles .

Développement décimal d'un réel

L'autre application immédiate de l'axiome d'Archimède est de permettre de définir la partie entière d'un réel.

Proposition 1 *Pour tout réel x, il existe un unique entier relatif n tel que n ≤ x < n + 1. On le note n = E(x) : c'est la partie entière du ré*

Preuve: Soit pour commencer x ∈ **IR+**, et A la partie de **IR** définie par A = {p ∈ N, x ≥ p}. A n'est pas vide puisque 0 ∈ A. De plus, grâce à la propriété d'Archimède, il existe un entier n tel que x < n : tous les éléments de A sont donc inférieurs à n : A est un ensemble fini donc admet un élément maximum m. Par définition de A on a alors m ≤ x < m + 1 puisque m + 1 / ∈ A.
Pour x < 0, on applique ce qui précède à –x : au total, on a alors montré que pour tout x ∈ **IR**, il existe un entier m tel que m ≤ x < m + 1.
Il reste à voir qu'il ne peut pas y en avoir un second : supposons que l'on ait aussi m'≤ x < m'+1.
On aurait –m'– 1 < –x ≤ –m' et donc m–m'– 1 < 0 < m–m'+ 1, ce qui, pour des entiers, entraine
m – m'= 0.
On peut être bien plus précis :

Proposition 1.4.2 *Soit x un réel. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe un unique entier q_n tel que*

$$\frac{q_n}{10^n} \leq x < \frac{q_n + 1}{10^n}.$$

Le rationnel $\frac{q_n}{10^n}$ est appelé **valeur approchée à 10^{-n} près par défaut** *du réel x.*

Preuve: L'entier $q_n = E(10^n x)$ convient, et c'est le seul. □

Q est dense dans R (La Propriété d'Archimède)

On a bien compris maintenant que **Q = IR**. Cependant, grâce `a la propriété d'Archimède, on montre que ces deux ensembles ne sont pas très différents :

Proposition : ***Q*** *est dense dans* ***IR*** *: tout intervalle]a, b[non-vide de* ***IR*** *contient au moins un rationnel.*

Preuve: Puisque b − a > 0, la propriété d'Archimède permet d'affirmer qu'il existe n ∈ N tel que
n > 1/(b − a). Posons alors m = E(na) : on a m ≤ na < m + 1, donc
m/n≤ a < (m + 1)/n≤ m/n+ 1/n< a + (b − a) = b.
Le nombre rationnel (m + 1)/n appartient donc a]a, b[.

Caractérisation des intervalles (Propriété d'Archimède)

Proposition Soit A une partie non-vide de **IR**. Les énoncés suivants sont équivalents :

1. A est un intervalle.
2. Pour tous a, b de A, l'intervalle [a, b] est inclus dans A.